Exámenes de Selectividad

Física. Comunidad Valenciana 2024, Extraordinaria

mentoor.es

Cuestión 1. Campo Gravitatorio

La tercera ley de Kepler establece la relación entre el radio orbital r de un planeta y su periodo T. Si la órbita alrededor del Sol se considera circular, esta relación viene dada por $T^2 = Cr^3$, donde C es una constante. Deduce razonadamente esta relación, explicando en qué principio o ley física te basas y escribe la expresión de C en función de otras magnitudes. ¿Depende el periodo de la masa del planeta? Justifica la respuesta.

Solución:

Para deducir la relación $T^2 = Cr^3$, nos basamos en la Ley de Gravitación Universal de Newton y en la dinámica del movimiento circular uniforme. La fuerza gravitatoria entre el Sol (masa M) y un planeta (masa m) es:

$$F_{\text{grav}} = G\frac{M \cdot m}{r^2}.$$

La fuerza centrípeta necesaria para que el planeta describa una órbita circular de radio r es:

$$F_{\text{cent}} = m\frac{v^2}{r}.$$

La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta:

$$F_{\text{grav}} = F_{\text{cent}} \quad \Rightarrow \quad G\frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Simplificamos m en ambos lados:

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}.$$

Multiplicamos ambos lados por r:

$$G\frac{M}{r} = v^2.$$

La velocidad orbital v se relaciona con el período T:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Sustituimos en la ecuación anterior:

$$G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad GMT^2 = 4\pi^2 r^3 \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3.$$

Entonces, la constante C es:

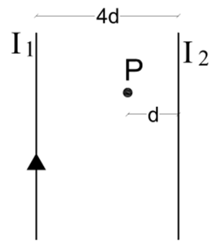
$$C = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Observamos que la masa del planeta m no aparece en la expresión final de T^2. Por lo tanto, el período T **no depende** de la masa del planeta, sino únicamente de la masa del Sol M y del radio orbital r.

Por lo tanto, la solución es $C = \frac{4\pi^2}{GM}$ y el período T no depende de la masa del planeta.

Cuestión 2. Campo Electromagnético

Dos corrientes eléctricas paralelas y de gran longitud están separadas entre sí una distancia $4d$. La corriente $I_1 = 6\,\mathrm{A}$ está dirigida hacia arriba, como aparece en la figura. Determina el valor y sentido de la corriente I_2, para que el campo magnético resultante en el punto P sea nulo. ¿Qué fuerza actuará sobre una carga eléctrica negativa que, pasando por P, se mueva en la misma dirección que las corrientes eléctricas? Razona todas las respuestas.



Solución:

El campo magnético producido por una corriente rectilínea infinita en un punto situado a una distancia r es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

La corriente $I_1 = 6\,\mathrm{A}$ está a una distancia $r_1 = 4d - d = 3d$ del punto P. Entonces, el campo magnético en P debido a I_1 es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{6\pi d}.$$

Aplicando la regla de la mano derecha, el campo magnético B_1 debido a I_1 en el punto P entra en la página.

La corriente I_2 está a una distancia $r_2 = d$ del punto P. El campo magnético en P debido a I_2 es:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}.$$

Para que el campo magnético total en P sea nulo, B_2 debe tener sentido contrario a B_1. Por lo tanto, B_2 debe estar dirigido hacia afuera de la página, que ocurre si la corriente I_2 está dirigida hacia abajo.

Para que el campo magnético resultante en P sea nulo:

$$B_1 = B_2.$$

Sustituyendo las expresiones:

$$\frac{\mu_0 I_1}{6\pi d} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{6} = \frac{I_2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{I_1}{3}.$$

Sustituyendo $I_1 = 6\,\mathrm{A}$:

$$I_2 = \frac{6\,\mathrm{A}}{3} = 2\,\mathrm{A}.$$

Por lo tanto, la corriente I_2 debe ser de $2\,\mathrm{A}$ y dirigida hacia abajo.

Una carga eléctrica negativa que pasa por P moviéndose en la misma dirección que las corrientes (hacia arriba) experimentará una fuerza dada por la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

En el punto P, el campo magnético resultante es cero. Por lo tanto, la fuerza magnética neta sobre la carga es nula.

Por lo tanto, la fuerza magnética resultante sobre la carga negativa en P es nula, ya que el campo magnético total es cero en ese punto.

Cuestión 3. Campo Electromagnético

Dos partículas idénticas de carga $q = 1\,\mu\text{C}$ y masa $m = 1\,\text{g}$, se encuentran inicialmente en reposo y separadas por una distancia $d = 1\,\text{m}$. Calcula la energía mecánica de una de las partículas. Supongamos que una de las partículas permanece fija mientras que la otra se deja libre, ¿cuál es su energía mecánica cuando se encuentra a una distancia de la otra partícula que es diez veces la inicial? Justifica la respuesta. Calcula su velocidad en dicho punto. Nota: considera sólo la interacción electrostática.

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}

Solución:

Energía mecánica inicial de la partícula:

Inicialmente, las dos partículas están en reposo y separadas una distancia $d = 1\,\text{m}$. La energía potencial electrostática entre las dos cargas es:

$$E_{p,i} = k\frac{q^2}{d} = (9 \cdot 10^9\,\text{N m}^2\text{C}^{-2}) \cdot \frac{(1 \cdot 10^{-6}\,\text{C})^2}{1\,\text{m}} = 9 \cdot 10^{-3}\,\text{J}.$$

Como están en reposo, la energía cinética inicial es cero. Entonces, la energía mecánica inicial de la partícula es:

$$E_{\text{mec},i} = E_{p,i} = 9 \cdot 10^{-3}\,\text{J}.$$

Energía mecánica cuando la distancia es $r = 10d = 10\,\text{m}$:

La energía mecánica total se conserva. La energía potencial final es:

$$E_{p,f} = k\frac{q^2}{r} = (9 \cdot 10^9\,\text{N m}^2\text{C}^{-2}) \cdot \frac{(1 \cdot 10^{-6}\,\text{C})^2}{10\,\text{m}} = 9 \cdot 10^{-4}\,\text{J}.$$

La energía cinética final es:

$$E_{c,f} = E_{\text{mec},i} - E_{p,f} = (9 \cdot 10^{-3}\,\text{J}) - (9 \cdot 10^{-4}\,\text{J}) = 8,1 \cdot 10^{-3}\,\text{J}.$$

Nótese que la disminución de la energía potencial al aumentar la distancia se transforma en energía cinética de la partícula en movimiento.

Cálculo de la velocidad en $r = 10\,\text{m}$:

La energía cinética es:

$$E_{c,f} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_{c,f}}{m}}.$$

Convertimos la masa a kilogramos:

$$m = 1\,\text{g} = 1 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}.$$

Entonces,

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,1 \cdot 10^{-3}\,\text{J}}{1 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}}} = \sqrt{16,2\,\text{m}^2/\text{s}^2} = 4,02\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la energía mecánica de la partícula sigue siendo $9 \cdot 10^{-3}$ J cuando está a $r = 10\,\text{m}$, y su velocidad en ese punto es $4,02\,\text{m/s}$.

Cuestión 4. Campo Electromagnético

Una espira circular de radio 30 cm, contenida en el plano $\boldsymbol{XY}$, se encuentra en una zona con un campo magnético uniforme $\vec{B} = 5\,\vec{k}\,\mathrm{T}$. Durante $0,1\,\mathrm{s}$ el campo magnético aumenta de forma constante hasta valer $10\,\vec{k}\,\mathrm{T}$, ¿cuánto valdrá la fuerza electromotriz inducida durante el proceso? Indica cuál será el sentido de la corriente inducida en la espira mediante una figura. Justifica las respuestas indicando la ley física en que te basas.

Solución:

La fuerza electromotriz inducida ($\mathcal{E}$) en una espira se puede calcular usando la Ley de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

donde Φ_B es el flujo magnético a través de la espira:

$$\Phi_B = B \cdot A.$$

En este caso, se tiene que:

- Radio de la espira: $r = 30\,\mathrm{cm} = 0,3\,\mathrm{m}$.
- Área de la espira: $A = \pi r^2 = \pi \cdot (0,3\,\mathrm{m})^2 = 0,09\,\pi\,\mathrm{m}^2$.
- Campo magnético inicial: $B_i = 5\,\mathrm{T}$.
- Campo magnético final: $B_f = 10\,\mathrm{T}$.
- Intervalo de tiempo: $\Delta t = 0,1\,\mathrm{s}$.

El cambio en el flujo magnético es:

$$\Delta\Phi_B = \Phi_{B_f} - \Phi_{B_i} = (B_f - B_i) \cdot A = (10\,\mathrm{T} - 5\,\mathrm{T}) \cdot 0,09\,\pi\,\mathrm{m}^2 = 0,45\,\pi\,\mathrm{Wb}.$$

La fuerza electromotriz inducida es entonces:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{0,45\,\pi\,\mathrm{Wb}}{0,1\,\mathrm{s}} = -4,5\,\pi\,\mathrm{V} \approx -14,14\,\mathrm{V}.$$

egún la Ley de Lenz, la corriente inducida circulará en un sentido tal que el campo magnético que genera se oponga al aumento del flujo magnético. Como el campo magnético aumenta en dirección $\vec{k}$ (eje $+Z$), la corriente inducida debe generar un campo magnético en dirección $-\vec{k}$ (eje $-Z$). Para lograr esto, la corriente inducida debe circular en sentido horario cuando se observa desde el eje $+Z$ (mirando hacia abajo en el plano XY).

Por lo tanto, la fuerza electromotriz inducida es $-14,14\,\mathrm{V}$, y la corriente inducida circula en sentido horario visto desde el eje $+Z$.

Cuestión 5. Óptica

Un objeto de 10 cm de altura está situado a 1 m del vértice de un espejo esférico convexo de 1 m de distancia focal. Calcula la posición y el tamaño de la imagen que se forma. Indica las características de la imagen con la ayuda de un esquema de rayos.

Solución:

Se tiene que:

- Altura del objeto: $y = 10\,\text{cm}$.
- Distancia del objeto al espejo: $s = -1\,\text{m}$ (negativa por convención en espejos).
- Distancia focal del espejo convexo: $f = 1\,\text{m}$ (positivo para espejos convexos).

Usamos la ecuación de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s}.$$

Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{1\,\text{m}} - \frac{1}{-1\,\text{m}} = 2\,\text{m}^{-1}.$$

Entonces,

$$s' = 0,5\,\text{m}.$$

Nótese que en espejos convexos, la imagen siempre se forma entre el espejo y el foco. En espejos convexos, independientemente de la posición del objeto, la imagen es:

- Virtual (se forma detrás del espejo).
- Derecha (no invertida).
- Reducida (de menor tamaño que el objeto).

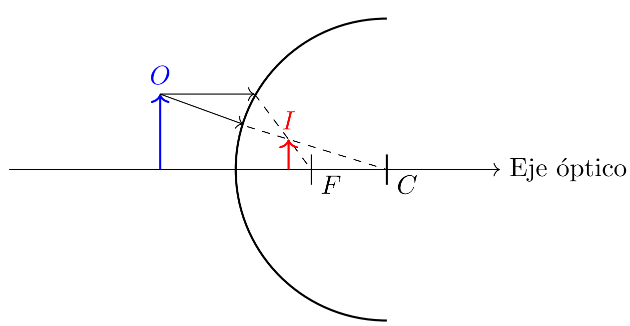
El aumento lateral es:

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{0,5}{-1} = 0,5.$$

Entonces,

$$y' = m \cdot y = 0,5 \cdot 10\,\text{cm} = 5\,\text{cm}.$$

El esquema de rayos es:



Por lo tanto, la imagen es virtual, derecha, reducida y se forma detrás del espejo y su tamaño es 5 cm.

Cuestión 6. Ondas

Un rayo de luz monocromática pasa de un medio 1 de índice de refracción n_1 a otro medio 2 con índice de refracción n_2. Si se cumple que $n_1 > n_2$, indica y razona cómo cambia la velocidad v, la frecuencia f, y la longitud de onda λ del rayo al pasar del medio 1 al medio 2.

Solución:

La velocidad de la luz en un medio es:

$$v = \frac{c}{n},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción del medio. Como $n_1 > n_2$, entonces

$$v_1 = \frac{c}{n_1} < v_2 = \frac{c}{n_2}.$$

La frecuencia de la luz depende únicamente de la fuente y no cambia al pasar de un medio a otro. La longitud de onda en un medio se relaciona con la velocidad y la frecuencia:

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

Dado que v aumenta y f es constante, entonces:

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} > \lambda_1 = \frac{v_1}{f}.$$

Por lo tanto, al pasar de un medio con mayor índice de refracción a otro con menor índice, la velocidad y la longitud de onda de la luz aumentan, mientras que la frecuencia permanece constante.

Cuestión 7. Física Moderna

Supongamos que se realiza la fusión nuclear de un núcleo de deuterio con un núcleo de tritio, ${}^2_1\mathrm{H} +^3_1 \mathrm{H} \to^a_{2b} X +^b_0 Y$. Determina X y Y e indica razonadamente qué partículas son. En cada reacción se generan $17,6\,\mathrm{MeV}$ de energía. Utilizando la anterior reacción de fusión, ¿cuántos gramos de deuterio se necesitarían para generar la energía eléctrica consumida en un año por los hogares en una ciudad como Alicante?

Datos: masa del deuterio, $m_D = 3,34{\cdot}10^{-27}$ kg; carga elemental, $q = 1,60{\cdot}10^{-19}$ C; energía eléctrica consumida en un año por los hogares de la ciudad de Alicante, $1,62 \cdot 10^{15}$ J

Solución:

La reacción nuclear es:

$${}^2_1\mathrm{H} +^3_1 \mathrm{H} \to^a_{2b} X +^b_0 Y.$$

Conservación del número de masa (A):

$$2 + 3 = a + b \quad \Rightarrow \quad a + b = 5.$$

Conservación del número atómico (Z):

$$1 + 1 = 2b \quad \Rightarrow \quad 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Entonces, $a = 5 - b = 5 - 1 = 4$. Así, X es ${}^4_2\mathrm{He}$ e Y es ${}^1_0\mathrm{n}$. Además,

- X es una partícula alfa (${}^4_2\mathrm{He}$).
- Y es un neutrón (${}^1_0\mathrm{n}$).

La reacción completa es:

$${}^2_1\mathrm{H} +^3_1 \mathrm{H} \to^4_2 \mathrm{He} +^1_0 \mathrm{n} + 17.6\,\mathrm{MeV}.$$

La energía liberada por cada reacción es:

$$E_{\text{reacción}} = 17,6\,\mathrm{MeV} = 17,6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} = 2,8195 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}.$$

El número de reacciones necesarias para obtener $E_{\text{total}} = 1,62 \cdot 10^{15}$ Jserá:

$$N = \frac{E_{\text{total}}}{E_{\text{reacción}}} = \frac{1,62 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J}}{2,8195 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}} = 5,747 \cdot 10^{26} \text{ reacciones.}$$

Para calcular la masa de deuterio necesaria, tenemos en cuenta que cada reacción consume un núcleo de deuterio (${}^2_1\mathrm{H}$), cuya masa es $m_D = 3,34 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Entonces, la masa total de deuterio requerida es:

$$m_{\text{total}} = N \cdot m_D = 5,747 \cdot 10^{26} \cdot 3,34 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 1,92\,\mathrm{kg}.$$

Por lo tanto, se necesitarían aproximadamente $1,92\,\mathrm{kg}$ de deuterio para generar la energía eléctrica consumida en un año por los hogares de Alicante.

Cuestión 8. Física Moderna

Un láser de fluoruro de kriptón, que se utiliza en experimentos de fusión por confinamiento inercial, puede emitir un haz de luz de longitud de onda 248 nm, con una energía de $1,1 \cdot 10^3$ J en un tiempo de 1 ns. Obtén razonadamente, la energía de un fotón, la potencia del láser (en MW) y el número de fotones que emite este láser en dicho intervalo de tiempo.

Datos: velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; constante de Planck, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s

Solución:

La energía de un fotón viene dada por:

$$E = h \cdot f,$$

donde f es la frecuencia de la luz. La frecuencia se calcula como:

$$f = \frac{c}{\lambda}.$$

Convertimos la longitud de onda a metros:

$$\lambda = 248\,\text{nm} = 248 \cdot 10^{-9}\,\text{m}.$$

Calculamos la frecuencia:

$$f = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{248 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 1,21 \cdot 10^{15}\,\text{Hz}.$$

Entonces,

$$E_{\text{fotón}} = (6,63 \cdot 10^{-34}\,\text{J s}) \cdot (1,21 \cdot 10^{15}\,\text{Hz}) = 8,02 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

La potencia es la energía emitida por unidad de tiempo:

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{1,1 \cdot 10^3\,\text{J}}{1 \cdot 10^{-9}\,\text{s}} = 1,1 \cdot 10^{12}\,\text{W}.$$

Convertimos a megavatios (MW):

$$P = 1,1 \cdot 10^{12}\,\text{W} = 1,1 \cdot 10^6\,\text{MW}.$$

El número de fotones es:

$$N = \frac{E_{\text{total}}}{E_{\text{fotón}}} = \frac{1,1 \cdot 10^3\,\text{J}}{8,02 \cdot 10^{-19}\,\text{J}} = 1,37 \cdot 10^{21}\ \text{fotones}.$$

Por lo tanto, la solución es:

- **La energía de un fotón es $8,02 \cdot 10^{-19}$ J.**
- **La potencia del láser es $1,1 \cdot 10^6$ MW.**
- **El número de fotones emitidos es $1,37 \cdot 10^{21}$.**

Problema 1. Campo Gravitatorio

Un satélite de masa m se mueve con velocidad $v = 5 \cdot 10^5\,\text{m/s}$ en una órbita circular de radio $r = 4 \cdot 10^8\,\text{m}$ alrededor de un planeta de masa M. La energía cinética del satélite es $E_c = 2 \cdot 10^{18}\,\text{J}$. Calcula:

a) **Las masas M del planeta y m del satélite.**
b) **La energía potencial y la energía mecánica del satélite en su órbita. Calcula también la energía mínima que será necesario aportar para que se aleje indefinidamente del planeta desde la órbita en que se encuentra.**

Dato: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2/\text{kg}^2$

Solución:

a) **Las masas M del planeta y m del satélite.**

La energía cinética del satélite es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Despejamos m:

$$m = \frac{2E_c}{v^2}.$$

Sustituimos los valores dados:

$$m = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{18}\,\text{J}}{(5 \cdot 10^5\,\text{m/s})^2} = 1,6 \cdot 10^7\,\text{kg}.$$

En una órbita circular, la fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Simplificamos m y r:

$$\frac{GM}{r} = v^2.$$

Despejamos M:

$$M = \frac{v^2 r}{G}.$$

Sustituimos los valores:

$$M = \frac{(5 \cdot 10^5\,\text{m/s})^2 \cdot 4 \cdot 10^8\,\text{m}}{6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2/\text{kg}^2} = 1,49925 \cdot 10^{30}\,\text{kg}.$$

Por lo tanto, la masa del satélite es $m = 1,6 \cdot 10^7\,\text{kg}$ y la masa del planeta es $M = 1,5 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$.

b) **La energía potencial y la energía mecánica del satélite en su órbita. Calcula también la energía mínima que será necesario aportar para que se aleje indefinidamente del planeta desde la órbita en que se encuentra.**

La energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -\frac{GMm}{r}.$$

Sustituimos los valores:

$$E_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{30}\,\text{kg} \cdot 1,6 \cdot 10^7\,\text{kg}}{4 \cdot 10^8\,\text{m}} = -4,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}.$$

La energía mecánica es la suma de la energía cinética y la potencial:

$$E_{\text{mec}} = E_c + E_p = 2 \cdot 10^{18}\,\text{J} - 4,002 \cdot 10^{18}\,\text{J} = -2,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}.$$

Para que el satélite se aleje indefinidamente, su energía mecánica debe ser al menos cero. Por lo tanto, debemos aportar una energía adicional igual en magnitud a la energía mecánica negativa actual:

$$E_{\text{adicional}} = -E_{\text{mec}} = 2,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}.$$

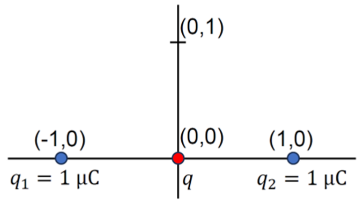
Por lo tanto, la energía potencial es $E_p = -4,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}$, la energía mecánica es $E_{\text{mec}} = -2,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}$, y se necesita aportar una energía mínima de $2,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}$ para que el satélite escape del planeta.

Problema 2. Campo Electromagnético

Dada la distribución de cargas de la figura, calcula:

a) **El valor de la carga q para que el campo eléctrico sea nulo en el punto $(0, 1)$ m.**
b) **El trabajo necesario para llevar una carga de $5\,\mu$C desde el infinito (donde tiene energía cinética nula) hasta el punto $(0, 1)$ m.**

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}



Solución:

a) **El valor de la carga q para que el campo eléctrico sea nulo en el punto $(0, 1)$ m.**

Calculamos el campo eléctrico producido por cada carga en el punto $P(0, 1)$:

- Carga q_1 en $(-1, 0)$:
  La distancia de q_1 a P es:

$$r_{q_1P} = \sqrt{(0-(-1))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\,\text{m}.$$

  El vector unitario desde q_1 hasta P es:

$$\vec{u}_{q_1P} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

  El campo eléctrico en P debido a q_1 es:

$$\vec{E}_{q_1} = \frac{kq_1}{r^2_{q_1P}}\vec{u}_{q_1P} = \frac{kq_1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{kq_1}{2\sqrt{2}}\,(1,\ 1)\,.$$

- Carga q_2 en $(1, 0)$:
  La distancia de q_2 a P es:

$$r_{q_2P} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\,\text{m}.$$

  El vector unitario desde q_2 hasta P es:

$$\vec{u}_{q_2P} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

  El campo eléctrico en P debido a q_2 es:

$$\vec{E}_{q_2} = \frac{kq_2}{r^2_{q_2P}}\vec{u}_{q_2P} = \frac{kq_2}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{kq_2}{2\sqrt{2}}\,(-1,\ 1)\,.$$

- Carga q en $(0, 0)$: La distancia de q a P es:

$$r_{qP} = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2} = 1\,\text{m}.$$

El vector unitario desde q hasta P es:

$$\vec{u}_{qP} = \frac{(0,1)}{1} = (0,\ 1).$$

El campo eléctrico en P debido a q es:

$$\vec{E}_q = \frac{kq}{r_{qP}^2}\vec{u}_{qP} = kq \cdot (0,\ 1).$$

Sumamos los campos eléctricos para obtener el campo total en P.

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_{q_1} + \vec{E}_{q_2} + \vec{E}_q.$$

Calculamos las componentes:

$$E_{\text{total},x} = \frac{kq_1}{2\sqrt{2}}(1) + \frac{kq_2}{2\sqrt{2}}(-1) + 0 = \frac{k(q_1 - q_2)}{2\sqrt{2}},$$

$$E_{\text{total},y} = \frac{kq_1}{2\sqrt{2}}(1) + \frac{kq_2}{2\sqrt{2}}(1) + kq(1) = \frac{k(q_1 + q_2)}{2\sqrt{2}} + kq.$$

Imponemos que el campo eléctrico total en P sea nulo.

$$E_{\text{total},x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k(q_1 - q_2)}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Dado que $q_1 = q_2 = 1\,\mu\text{C}$, esta componente ya es cero.

$$E_{\text{total},x} = 0.$$

Para la componente y:

$$E_{\text{total},y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k(q_1 + q_2)}{2\sqrt{2}} + kq = 0.$$

Despejamos q:

$$kq = -\frac{k(q_1 + q_2)}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{q_1 + q_2}{2\sqrt{2}}.$$

Sustituimos $q_1 = q_2 = 1\,\mu\text{C}$:

$$q = -\frac{1\,\mu\text{C} + 1\,\mu\text{C}}{2\sqrt{2}} = -\frac{2\,\mu\text{C}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}} = -0,7071\,\mu\text{C}.$$

Por lo tanto, la carga q debe ser $q = -0,7071\,\mu\text{C}$ para que el campo eléctrico sea nulo en el punto $(0,1)$ m.

b) El trabajo necesario para llevar una carga de $5\,\mu\text{C}$ desde el infinito (donde tiene energía cinética nula) hasta el punto $(0,1)$ m.

Calculamos el potencial eléctrico en el punto $P(0,1)$ debido a las tres cargas. El potencial debido a una carga puntual es:

$$V = k\frac{q}{r}.$$

Potencial debido a q_1:

$$V_{q_1} = k\frac{q_1}{r_{q_1P}} = k\frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}\,\text{m}}.$$

<u>Potencial debido a q_2:</u>

$$V_{q_2} = k\frac{q_2}{r_{q_2P}} = k\frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}\,\text{m}}.$$

<u>Potencial debido a q:</u>

$$V_q = k\frac{q}{r_{qP}} = k\frac{q}{1\,\text{m}}.$$

El potencial total en P es:

$$V_{\text{total}} = V_{q_1} + V_{q_2} + V_q = k\left(\frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}} + \frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}} + q\right).$$

Dado que $q = -\frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}}$ (del apartado a)), tenemos:

$$V_{\text{total}} = k\left(\frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}} + \frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}} - \frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}}\right) = k\left(\frac{1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{k\cdot(1\,\mu\text{C})}{\sqrt{2}}.$$

Calculamos el trabajo para mover la carga de prueba desde el infinito hasta el punto P. El trabajo es:

$$W = q_{\text{inf}} \cdot V_{\text{total}}.$$

Sustituimos $q_{\text{inf}} = 5\,\mu\text{C}$:

$$W = (5\,\mu\text{C})\cdot\frac{k\cdot(1\,\mu\text{C})}{\sqrt{2}} = \frac{5\,\mu\text{C}\cdot k\cdot 1\,\mu\text{C}}{\sqrt{2}} = 31,82\,\text{mJ}.$$

Por lo tanto, el trabajo necesario es $\mathbf{31,82\,mJ}$.

Problema 3. Ondas

El agua contenida en un depósito está separada del aire por una placa plana horizontal de vidrio, de espesor $d = 10\,\text{cm}$, estando su cara inferior en contacto con el agua. Un rayo de luz monocromática de frecuencia $f = 3 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$, procedente de una lámpara situada en el interior del depósito, incide sobre el vidrio con un ángulo $\theta = 45°$ respecto de la normal a la superficie de la placa. Calcula razonadamente:

a) **El ángulo de refracción entre el agua y el vidrio y el ángulo de refracción entre el vidrio y el aire. Representa los rayos en los tres medios.**
b) **El ángulo de incidencia máximo de entrada del rayo desde el agua a la placa de vidrio, θ_m, para que salga de ésta al aire, así como el tiempo que tarda el rayo en propagarse a través del vidrio cuando incide con este ángulo θ_m. Calcula también la longitud de onda del rayo en el interior de la placa de vidrio.**

Datos: $n_{\text{agua}} = 1,33$; $n_{\text{vidrio}} = 1,62$; $n_{\text{aire}} = 1,00$; velocidad de la luz en el aire, $c = 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}$

Solución:

a) **El ángulo de refracción entre el agua y el vidrio y el ángulo de refracción entre el vidrio y el aire. Representa los rayos en los tres medios.**

Aplicamos la Ley de Snell en la interfaz entre el agua y el vidrio:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin\theta_1 = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin\theta_2,$$

donde:
- $\theta_1 = 45°$ es el ángulo de incidencia en el agua,
- θ_2 es el ángulo de refracción en el vidrio.

Despejamos $\sin\theta_2$:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_{\text{agua}}}{n_{\text{vidrio}}} \cdot \sin\theta_1.$$

Sustituimos los valores:

$$\sin\theta_2 = \frac{1{,}33}{1{,}62} \cdot \sin 45° = \frac{1{,}33}{1{,}62} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}5805.$$

Calculamos θ_2:

$$\theta_2 = \arcsin(0{,}5805) = 35{,}5°.$$

Ahora, aplicamos la Ley de Snell en la interfaz entre el vidrio y el aire:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin\theta_2 = n_{\text{aire}} \cdot \sin\theta_3,$$

donde θ_3 es el ángulo de refracción en el aire. Despejamos $\sin\theta_3$:

$$\sin\theta_3 = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin\theta_2.$$

Sustituimos los valores:

$$\sin\theta_3 = 1{,}62 \cdot 0{,}5805 = 0{,}9404.$$

Calculamos θ_3:

$$\theta_3 = \arcsin(0{,}9404) = 70{,}0°.$$

Por lo tanto, el ángulo de refracción entre el agua y el vidrio es $\theta_2 = 35{,}5°$ y el ángulo de refracción entre el vidrio y el aire es $\theta_3 = 70{,}0°$.

b) El ángulo de incidencia máximo de entrada del rayo desde el agua a la placa de vidrio, $\boldsymbol{\theta_m}$, para que salga de ésta al aire, así como el tiempo que tarda el rayo en propagarse a través del vidrio cuando incide con este ángulo $\boldsymbol{\theta_m}$. Calcula también la longitud de onda del rayo en el interior de la placa de vidrio.

Determinamos el ángulo crítico en la interfaz vidrio-aire. La condición para que el rayo salga al aire es que el ángulo de incidencia en la interfaz vidrio-aire sea menor que el ángulo crítico θ_c, dado por:

$$\sin\theta_c = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{1{,}00}{1{,}62} = 0{,}6173.$$

Entonces,

$$\theta_c = \arcsin(0{,}6173) = 38{,}2°.$$

Usamos la Ley de Snell en la interfaz agua-vidrio para encontrar θ_m:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin\theta_m = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin\theta_c.$$

Despejamos $\sin\theta_m$:

$$\sin\theta_m = \frac{n_{\text{vidrio}}}{n_{\text{agua}}} \cdot \sin\theta_c = \frac{1{,}62}{1{,}33} \cdot 0{,}6173 = 0{,}7526.$$

Calculamos θ_m:

$$\theta_m = \arcsin(0{,}7526) = 48{,}8°.$$

Calculamos el tiempo que tarda el rayo en atravesar el vidrio. La velocidad de la luz en el vidrio es:

$$v_{\text{vidrio}} = \frac{c}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}62} = 1{,}8519 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

El espesor del vidrio es $d = 0{,}10\,\text{m}$. La distancia recorrida en el vidrio es:

$$L = \frac{d}{\cos\theta_c} = \frac{0{,}10\,\text{m}}{\cos 38{,}2°} = \frac{0{,}10\,\text{m}}{0{,}7854} = 0{,}1274\,\text{m}.$$

El tiempo de propagación es:

$$t = \frac{L}{v_{\text{vidrio}}} = \frac{0{,}1274\,\text{m}}{1{,}8519 \cdot 10^8\,\text{m/s}} = 6{,}88 \cdot 10^{-10}\,\text{s}.$$

Calculamos la longitud de onda en el vidrio:

$$\lambda_{\text{vidrio}} = \frac{v_{\text{vidrio}}}{f} = \frac{1{,}8519 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{3 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 6{,}173 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 617{,}3\,\text{nm}.$$

Por lo tanto, el ángulo máximo de incidencia es $\boldsymbol{\theta_m = 48{,}8°}$, el tiempo de propagación a través del vidrio es $\boldsymbol{6{,}88 \cdot 10^{-10}}$ s y la longitud de onda en el vidrio es 617,3 nm.

Problema 4. Física Moderna

La frecuencia umbral del cátodo de una célula fotoeléctrica es de $f_0 = 5 \cdot 10^{14}$ Hz. Dicho cátodo se ilumina con luz de frecuencia $f = 1,5 \cdot 10^{15}$ Hz. Calcula:

a) **La velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos desde el cátodo.**
b) **La diferencia de potencial que hay que aplicar para anular la corriente eléctrica producida en la fotocélula.**

Datos: Constante de Planck, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s; masa del electrón, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; carga elemental, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

Solución:

a) **La velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos desde el cátodo.**

Aplicamos la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$E_\mathrm{c} = h(f - f_0).$$

Calculamos la energía cinética máxima:

$$E_\mathrm{c} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\ s} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz} - 5 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}) = 6{,}63 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

Ahora, utilizamos la relación entre energía cinética y velocidad:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2.$$

Despejamos $v_{\max}$:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{c}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 1{,}207 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad máxima de los fotoelectrones es $1{,}207 \cdot 10^6$ m/s.

b) **La diferencia de potencial que hay que aplicar para anular la corriente eléctrica producida en la fotocélula.**

La energía cinética máxima se puede expresar en términos del potencial de frenado V:

$$E_\mathrm{c} = q \cdot V.$$

Despejamos V:

$$V = \frac{E_\mathrm{c}}{q} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 4{,}144\,\mathrm{V}.$$

Por lo tanto, la diferencia de potencial necesaria es 4,144 V.